

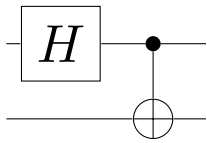
Corrección de ejercicios

Joaquín Keller

21 de enero 2026

1 Ejercicio simple (con corrección parcial)

1.1 Indicar la matriz correspondiente a este circuito



La matriz correspondiente al circuito es $C_X(H \otimes I)$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

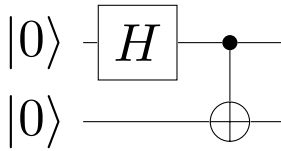
$$H \otimes I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_X(H \otimes I) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Código Mathematica™:

```
H = {{1, 1}, {1, -1}}/Sqrt[2]
H*Sqrt[2] // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
Id = IdentityMatrix[2]
Id // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
CNOT = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 1, 0}}
CNOT // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
KroneckerProduct[H, Id]*Sqrt[2] // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
CNOT.KroneckerProduct[H, Id]*Sqrt[2] // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
```

1.2 Estado cuántico final?



Este circuito se lee: $C_X(H \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle)$

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle |0\rangle = |0,0\rangle = |00\rangle = |\underline{0}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

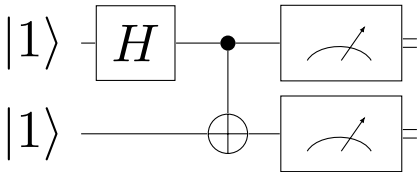
Utilizando el resultado del ejercicio anterior:

$$C_X(H \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Código Mathematica™:

```
ket0 = {{1}, {0}}
ket0 // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
KroneckerProduct[ket0, ket0] // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
CNOT.KroneckerProduct[H, Id].KroneckerProduct[ket0, ket0] // MatrixForm //
TeXForm // CopyToClipboard
```

1.3 Indicar el vector de probabilidades correspondientes al circuito



El circuito se lee así: $C_X(H \otimes I)(|1\rangle \otimes |1\rangle) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

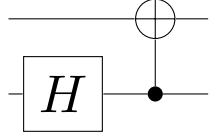
Aplicando la regla de Born, el vector de probabilidades es:

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |0|^2 \\ |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 \\ |-\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 \\ |0|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Código Mathematica™:

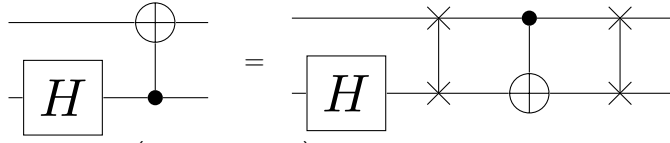
```
ket1 = {{0}, {1}}
ket1 // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
CNOT . KroneckerProduct[H, Id] . KroneckerProduct[ket1, ket1] // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
```

1.4 Matriz correspondiente a este circuito?



El qubit del control de CNOT es aquí el segundo qubit, con dos compuertas swap lo podemos invertir, para regresar al CNOT del cual conocemos la matriz: $C_X^{1,0} = \text{SWAP } C_X^{0,1} \text{ SWAP}$

La sustitución en el circuito:



$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_X^{1,0} = \text{SWAP } C_X \text{ SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz correspondiente al circuito de la pregunta es:

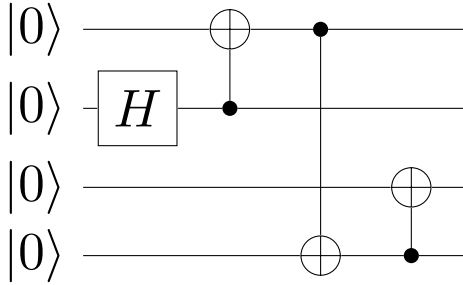
$$C_X^{1,0}(I \otimes H) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Código Mathematica™:

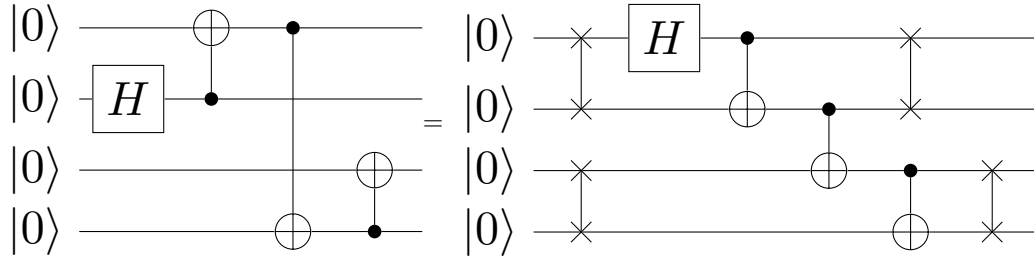
```
SWAP = {{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1}}
SWAP // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
SWAP.CNOT.SWAP // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
Sqrt[2]*KroneckerProduct[Id, H] // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
Sqrt[2]*SWAP.CNOT.SWAP.KroneckerProduct[Id, H] // MatrixForm // TeXForm // CopyToClipboard
```

2 Swapeando qubits

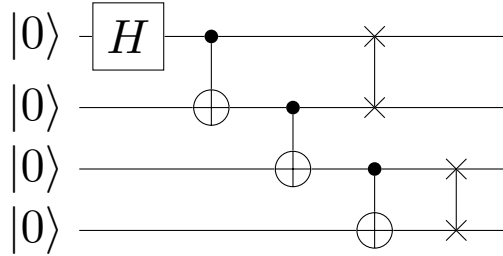
2.1 Indicar el estado cuántico final utilizando la notación de Dirac



Podemos notar que cambiando el orden de los qubits obtenemos este nuevo circuito:



Y como inicialmente los qubits son todos idénticos, el orden de estos es irrelevante. Finalmente el circuito es equivalente a:



Sin los dos swaps finales el circuito se lee: $(I \otimes I \otimes C_X)(I \otimes C_X \otimes I)(C_X \otimes I \otimes I)(H \otimes I \otimes I \otimes I)|0000\rangle$

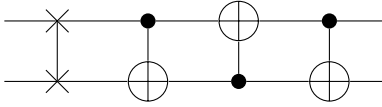
El cálculo con Mathematica nos indica que el estado cuántico final es: $\frac{|0000\rangle + |1111\rangle}{\sqrt{2}}$

Vemos que ese estado cuántico es invariable cuando se cambia el orden de los qubits. Es entonces inútil aplicar los dos swap finales.

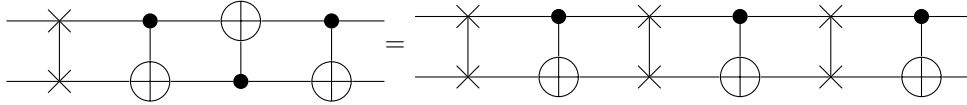
Código Mathematica™:

```
Sqrt[2]* KroneckerProduct[Id, Id, CNOT].KroneckerProduct[Id, CNOT, Id].
KroneckerProduct[CNOT, Id, Id].
KroneckerProduct[H, Id, Id, Id].
KroneckerProduct[ket0, ket0, ket0, ket0] // MatrixForm
```

2.2 Matriz correspondiente a este circuito?

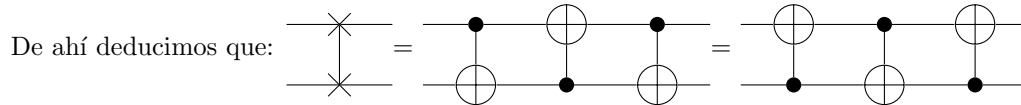


Podemos notar que:



La matriz correspondiente a este circuito es $\text{SWAP } C_X \text{ SWAP } C_X \text{ SWAP } C_X$ y el cálculo con MathematicaTM nos indica que es la identidad:

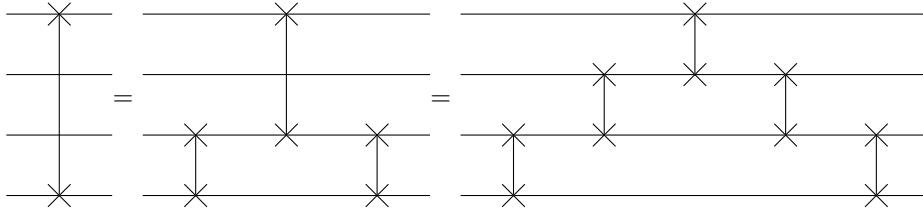
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Código MathematicaTM:

```
SWAP.CNOT.SWAP.CNOT.SWAP.CNOT // MatrixForm
```

2.3 Matriz correspondiente a este circuito?



La matriz es $(I \otimes I \otimes SWAP)(I \otimes SWAP \otimes I)(SWAP \otimes I \otimes I)(I \otimes SWAP \otimes I)(I \otimes I \otimes SWAP)$

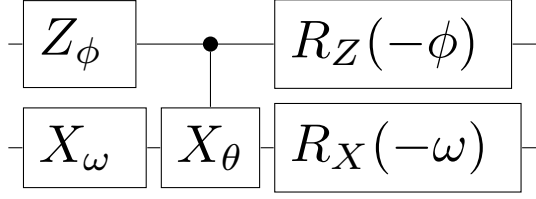
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Código Mathematica™:

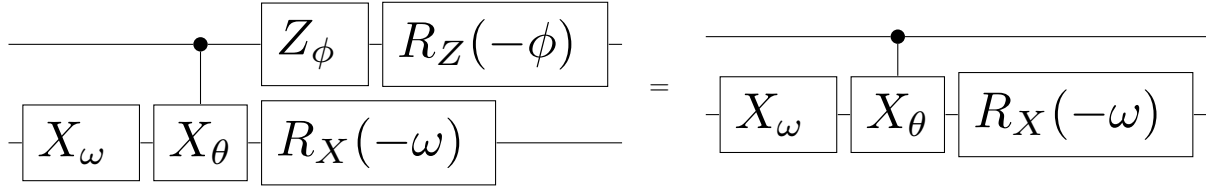
```
KroneckerProduct[Id, Id, SWAP] . KroneckerProduct[Id, SWAP, Id] .
  KroneckerProduct[SWAP, Id, Id] . KroneckerProduct[Id, SWAP, Id] .
  KroneckerProduct[Id, Id, SWAP] // MatrixForm //
TeXForm // CopyToClipboard
```

3 Juego

3.1 Matriz del circuito?



Podemos notar que $Z_\phi |0\rangle = e^{-i\phi/2} |0\rangle \simeq |0\rangle$ y que $Z_\phi |1\rangle = e^{i\phi/2} |1\rangle \simeq |1\rangle$. Es decir, que Z_ϕ no tiene influencia sobre el punto de control y que el circuito es equivalente a:



Por definición de las compuertas controladas tenemos:

$$\begin{array}{c}
 |0\rangle \text{ ————— } |0\rangle \\
 | \psi \rangle \text{ — } [X_\omega] \text{ — } [X_\theta] \text{ — } [R_X(-\omega)] \text{ — } R_X(-\omega) X_\omega | \psi \rangle = | \psi \rangle
 \end{array}$$

y

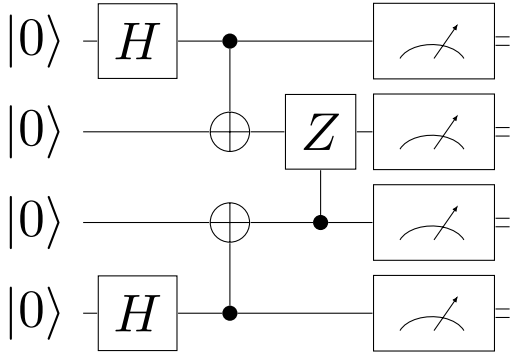
$$\begin{array}{c}
 |1\rangle \text{ ————— } |1\rangle \\
 | \psi \rangle \text{ — } [X_\omega] \text{ — } [X_\theta] \text{ — } [R_X(-\omega)] \text{ — } R_X(-\omega) X_\theta X_\omega | \psi \rangle = X_\theta | \psi \rangle
 \end{array}$$

De ahí vemos que nuestro circuito es equivalente a:

$$\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & X_\theta \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 & 0 & i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

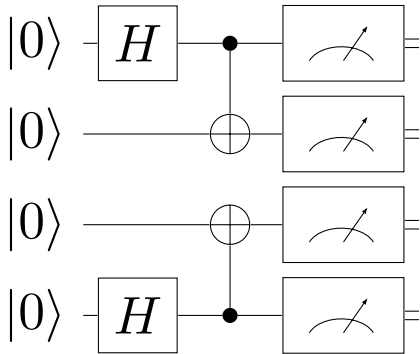
Código Mathematica™: No se utilizó Mathematica.

3.2 Dar las probabilidades de cada secuencia de bits



Z siendo diagonal, la matriz C_Z es diagonal, y cuando aplicamos una matriz diagonal D antes de medir esta no tiene efecto: D siendo unitaria todos los valores propios, los elementos de la diagonal, tienen módulo 1 y entonces $\mathcal{M}(D\psi) = \mathcal{M}(\psi)$

El circuito es entonces equivalente a:



Los dos primeros qubits están entrelazados en un estado de Bell y así es también de los dos últimos qubits. Los dos primeros qubits son independientes de los dos últimos (no están entrelazados). Es decir, que los dos primeros qubits se miden los dos a cero en la mitad de los casos y en la otra mitad se miden a uno. Lo mismo se puede decir de los dos últimos. Combinando estos datos, obtenemos: $P(0000) = P(1100) = P(0011) = P(1111) = 1/4$ y las otras secuencias tienen una probabilidad nula.

Código Mathematica™: No se utilizó Mathematica.