Algoritmo de Deutsch–Jozsa

Computación Cuántica: Algorítmica y Software

Joaquín Keller

2025 UCV

Definiciones

$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ $\qquad$ 2^{2^n} funciones

f es *constante* ssi $\exists k \in \{0,1\}\ \forall x \in \{0,1\}^n\ f(x) = k$

2 funciones constantes

f es *equilibrada* ssi $|\{x \in \{0,1\}^n | f(x) = 0\}| = |\{x \in \{0,1\}^n | f(x) = 1\}|$

$\frac{2^n!}{2^{n-1}!^2}$ funciones equilibradas

Hay muchas funciones que no son ni constantes ni equilibradas.

El problema

Dada una función $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ constante o equilibrada, determinar en cuál categoría está

Complejidad algorítmica: cuantas veces se llama la función f
f es una caja negra, no se considera su complejidad algorítmica

Algoritmo clásico: Evaluar f sobre la mitad de $\{0,1\}^n$ más 1 elemento
Si todos los valores son idénticos, f es constante, si no, f es equilibrada

$2^{n-1} + 1$ evaluaciones de $f \Rightarrow$ complejidad algorítmica: $O(2^n)$

Algoritmo de Deutsch–Jozsa, $n = 1$

$f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$

4 funciones en total

constantes

$$f_0 \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$$

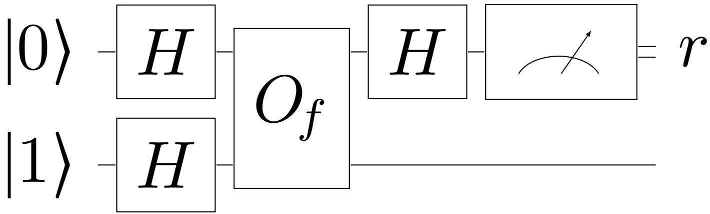
$$f_1 \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

equilibradas

$$f_2 \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

$$f_3 \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$$

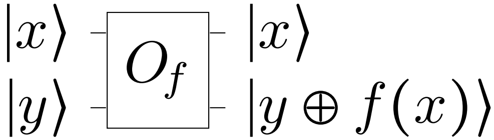
Circuito cuántico para Deutsch–Jozsa, $n = 1$



O_f : Oráculo para f

$$\begin{cases} r = 0 : f \text{ constante} \\ r = 1 : f \text{ equilibrada} \end{cases}$$

Oráculo para f



$x \in \{0,1\}^n \qquad y \in \{0,1\}$

O_f permuta vectores de la base

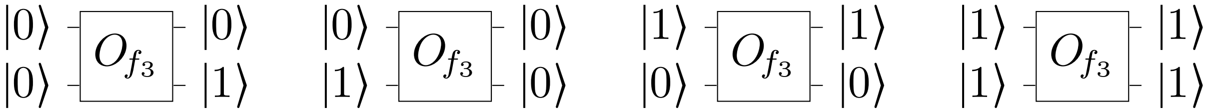
$0 \oplus 0 = 0 \qquad 1 \oplus 0 = 1 \qquad 0 \oplus 1 = 1 \qquad 1 \oplus 1 = 0 \qquad$ [$\oplus$: XOR]

$O_f\,|x, y\rangle = |x, y \oplus f(x)\rangle \qquad$ [Notación: $|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle\,|y\rangle = |x, y\rangle = |xy\rangle$]

$$O_f O_f\,|x, y\rangle = O_f\,|x, y \oplus f(x)\rangle = |x, y \oplus f(x) \oplus f(x)\rangle = |x, y \oplus 0\rangle = |x, y\rangle$$

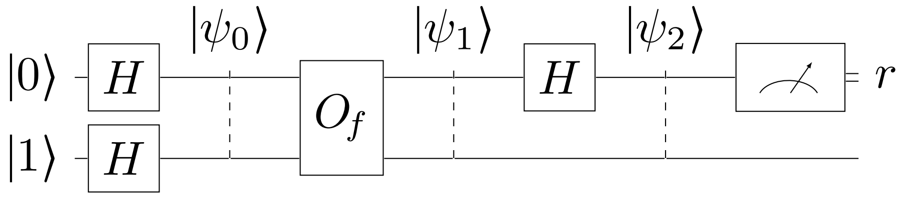
$O_f = O_f^{-1} \qquad$ O_f es hermitiano (unitario y autoinversa)

Ejemplo con f_3 $\quad f_3(0) = 1 \quad f_3(1) = 0$ $\quad$ [f_3: NOT]



$$O_{f_3}\left|00\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad O_{f_3}\left|01\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad O_{f_3}\left|10\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad O_{f_3}\left|11\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$O_{f_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O_{f_3}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= H|0\rangle \otimes H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ &= \tfrac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \end{aligned}$$

$$2|\psi_1\rangle = O_f(2|\psi_0\rangle) = \\ |0, 0 \oplus f(0)\rangle - |0, 1 \oplus f(0)\rangle + |1, 0 \oplus f(1)\rangle - |1, 1 \oplus f(1)\rangle$$

[Notación: $|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle\,|y\rangle = |x, y\rangle = |xy\rangle$]

$$2\,|\psi_1\rangle = \underbrace{|0, 0 \oplus f(0)\rangle - |0, 1 \oplus f(0)\rangle}_{A} + \underbrace{|1, 0 \oplus f(1)\rangle - |1, 1 \oplus f(1)\rangle}_{B}$$

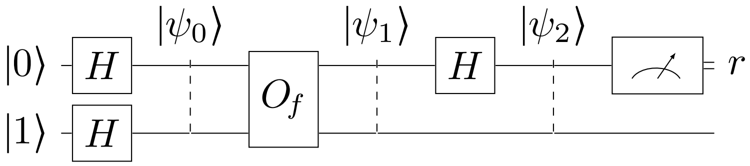
$$A = \begin{cases} |00\rangle - |01\rangle \text{ si } f(0) = 0 \\ |01\rangle - |00\rangle \text{ si } f(0) = 1 \end{cases} \qquad A = (-1)^{f(0)}(|00\rangle - |01\rangle)$$

$(-1)^k$ es un truco de escritura

$$(-1)^k = \begin{cases} +1 \text{ si } k = 0 \text{ (o si } k \text{ es par)} \\ -1 \text{ si } k = 1 \text{ (o si } k \text{ es impar)} \end{cases}$$

De la misma manera $B = (-1)^{f(1)}(|10\rangle - |11\rangle)$

$$2\,|\psi_1\rangle = (-1)^{f(0)}(|00\rangle - |01\rangle) + (-1)^{f(1)}(|10\rangle - |11\rangle)$$



$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_2\rangle = (H \otimes I)\,|\psi_1\rangle \qquad (H \otimes I)(|x\rangle \otimes |y\rangle) = H\,|x\rangle \otimes |y\rangle$$

$$\sqrt{2}(H\otimes I)\,|00\rangle = \sqrt{2}H\,|0\rangle\,|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)\,|0\rangle = |0\rangle\,|0\rangle + |1\rangle\,|0\rangle = |00\rangle + |10\rangle$$

$$\sqrt{2}(H\otimes I)\,|10\rangle = \sqrt{2}H\,|1\rangle\,|0\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)\,|0\rangle = |0\rangle\,|0\rangle - |1\rangle\,|0\rangle = |00\rangle - |10\rangle$$

$$\sqrt{2}(H\otimes I)\,|01\rangle = |01\rangle + |11\rangle \qquad \sqrt{2}(H\otimes I)\,|11\rangle = |01\rangle - |11\rangle$$

$$\sqrt{2}H\otimes I : |00\rangle \mapsto |00\rangle + |10\rangle \qquad |01\rangle \mapsto |01\rangle + |11\rangle$$

$$|10\rangle \mapsto |00\rangle - |10\rangle \qquad |11\rangle \mapsto |01\rangle - |11\rangle$$

$$2|\psi_1\rangle = (-1)^{f(0)}(|00\rangle - |01\rangle) + (-1)^{f(1)}(|10\rangle - |11\rangle)$$

$$2\sqrt{2}|\psi_2\rangle = (\sqrt{2}H\otimes I)2|\psi_1\rangle$$

$$= (-1)^{f(0)}(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle) + (-1)^{f(1)}(|00\rangle - |10\rangle - |01\rangle + |11\rangle) =$$

$$\left((-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}\right)|00\rangle$$

$$- \left((-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}\right)|01\rangle$$

$$+ \left((-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}\right)|10\rangle$$

$$- \left((-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}\right)|11\rangle$$

$$a = (-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)} \qquad b = (-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}$$

$a = (-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)} \qquad b = (-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}$

$2\sqrt{2}\,|\psi_2\rangle = a\,|00\rangle - a\,|01\rangle + b\,|10\rangle - b\,|11\rangle$

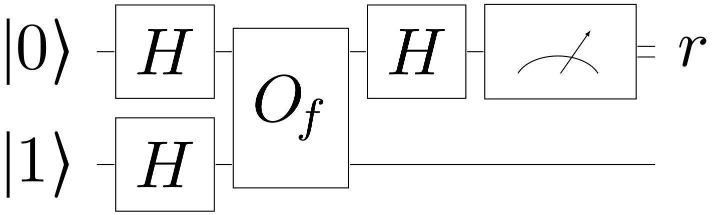
si f es constante: $f(0) = f(1)$ entonces $b = 0$ y $a = \pm 2$

$|\psi_2\rangle = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle)$ El primer qubit siempre está a 0

Si f es equilibrada: $f(0) \neq f(1)$ entonces $a = 0$ y $b = \pm 2$

$|\psi_2\rangle = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle)$ El primer qubit siempre está a 1

Algoritmo cuántico Deutsch–Jozsa, $n = 1$



$r = 0 \Rightarrow f$ es constante $\qquad r = 1 \Rightarrow f$ es equilibrada

O_f se ejecuta una sola vez

En la versión clásica, f se ejecuta dos veces

Ejercicio

$f : \{0,1\} \to \{0,1\}$

constantes

$$f_0 \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$$

$$f_1 \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

equilibradas

$$f_2 \begin{cases} 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

$$f_3 \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$$

Escribir los circuitos y las matrices de los oráculos O_{f_0}, O_{f_1}, O_{f_2} y O_{f_3}