

Estado cuántico 1-cubit

Estado cuántico $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad \beta \in \mathbb{C}$

Notación de Dirac: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ “a la vez cero y uno”

Los números complejos α, β se llaman *amplitudes de probabilidad*

Medir un cubit: $P(0) = |\alpha|^2 \quad P(1) = |\beta|^2 \quad \mathcal{M}(|\psi\rangle) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 \\ |\beta|^2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1}$$

Multiplicación por un escalar

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix}$$

Suma de vectores

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha \\ y + \beta \end{pmatrix}$$

Multiplicación por una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$$

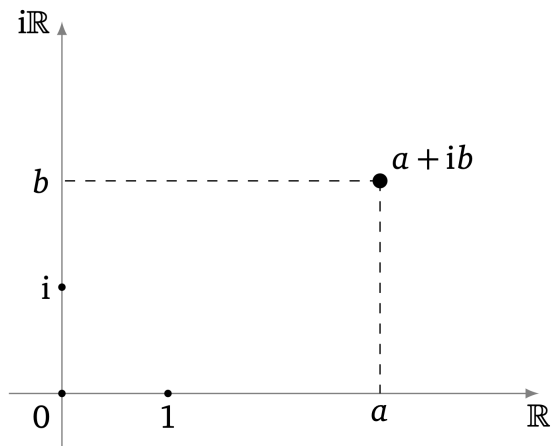
$$Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Números complejos

$$(a, b) \in \mathbb{R} \quad a + i b \in \mathbb{C} \quad i^2 = -1$$

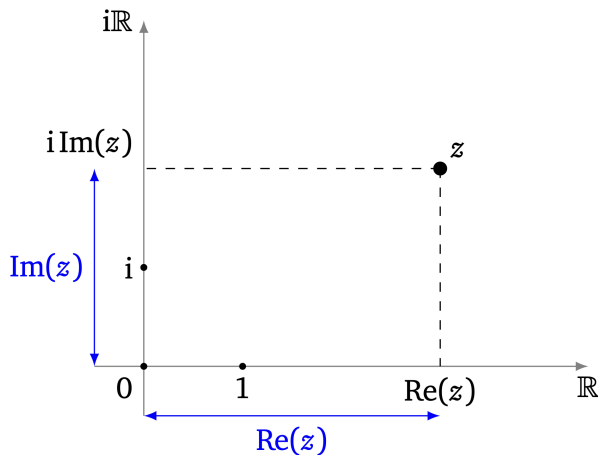


Parte real, parte imaginaria

$$z \in \mathbb{C}$$

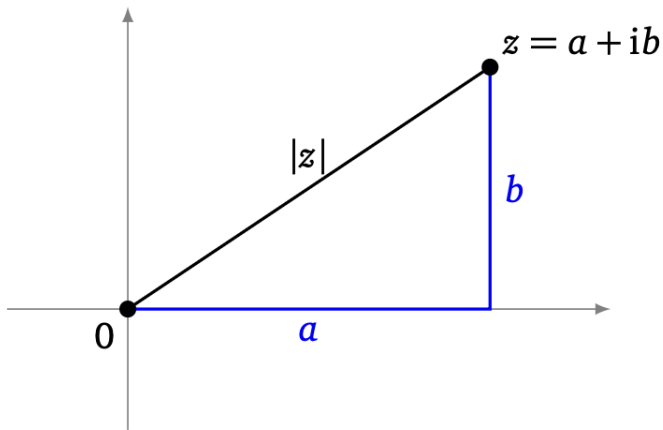
parte real: $Re(z)$

parte imaginaria: $Im(z)$



Módulo

$$z = a + ib \quad \text{módulo de } z: \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Forma polar trigonométrica (1)

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \quad r = |z| \quad \text{fase: } \theta$$

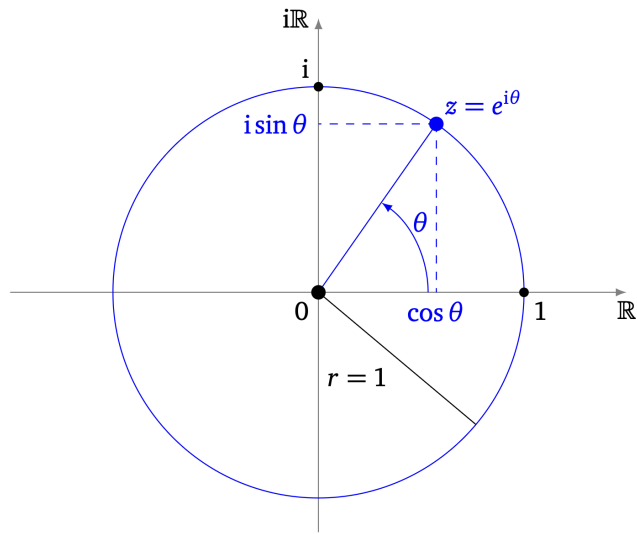
$$\text{Formula de Moivre: } (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\text{Notación exponencial: } z = r e^{i\theta}$$

$$z = r e^{i\theta} \quad z' = r' e^{i\theta'} \quad zz' = rr' e^{i(\theta+\theta')}$$

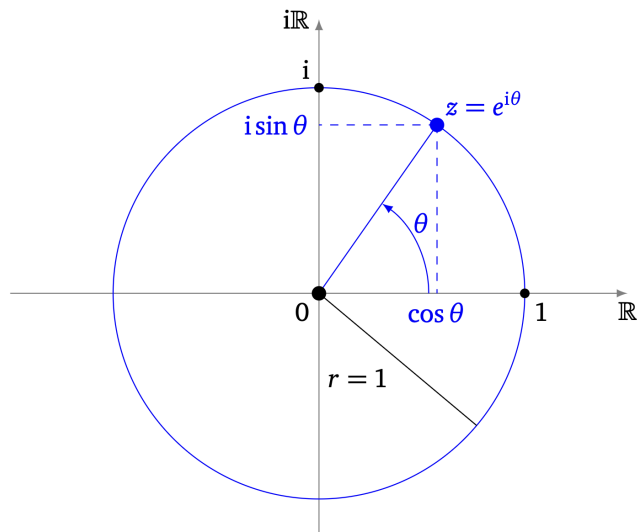
$$z = a + ib \quad z' = a' + ib' \quad zz' = aa' - bb' + i(a'b + ab')$$

Forma polar trigonométrica (2)



Ejemplos

forma algebraica	forma exponencial
i	$e^{\frac{i\pi}{2}}$
$-i$	$e^{-\frac{i\pi}{2}}$
-1	$e^{i\pi}$
1	$e^{i2\pi}$
$1 + i$	$\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$
$(1 + i)/\sqrt{2}$	$e^{\frac{i\pi}{4}}$
$(1 - i)/\sqrt{2}$	$e^{-\frac{i\pi}{4}}$



‘La fase global no es observable’ (1)

Estado cuántico $|\psi\rangle$

No es observable: $\mathcal{M}(e^{i\omega} |\psi\rangle) = \mathcal{M}(|\psi\rangle)$ ω : fase global

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}(e^{i\omega} |\psi\rangle) = \begin{pmatrix} |e^{i\omega}\alpha|^2 \\ |e^{i\omega}\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |e^{i\omega}|^2 |\alpha|^2 \\ |e^{i\omega}|^2 |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 \\ |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

Los vectores $e^{i\omega} |\psi\rangle$ y $|\psi\rangle$ representan el mismo estado cuántico!

$$|\psi\rangle \simeq e^{i\omega} |\psi\rangle$$

‘La fase global no es observable’ (2)

Matriz U correspondiente a una compuerta cuántica

$$U |\psi\rangle \simeq e^{i\omega} U |\psi\rangle$$

$$U \simeq e^{i\omega} U$$

Las matrices $e^{i\omega}U$ y U representan las mismas compuertas cuánticas!

1-cubit: esfera de Bloch

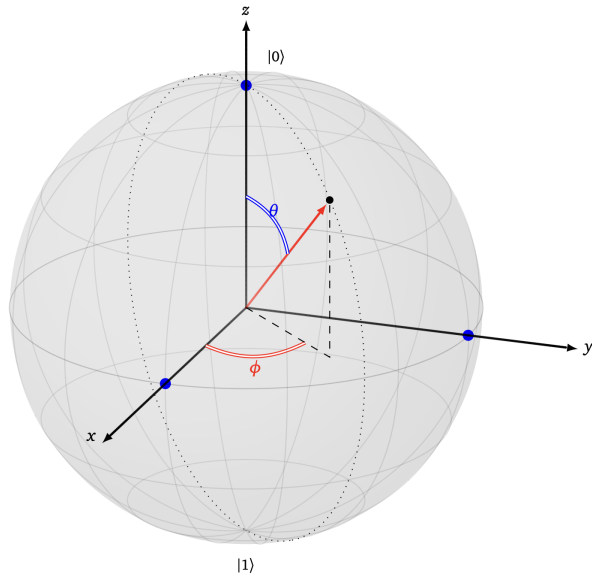
$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad \| |\psi\rangle \| = 1$$

$$\| |\psi\rangle \| = 1 \iff |\psi\rangle = e^{i\omega} (\cos \theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle) \\ 0 \leq \omega < 2\pi \quad 0 < \theta < \pi \quad -\pi < \phi \leq \pi$$

Forma canónica de un estado cuántico de 1-cubit:

$$|\psi\rangle \simeq \cos \theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle \quad 0 < \theta < \pi \quad -\pi < \phi \leq \pi$$

Esfera de Bloch



Las compuertas de Pauli

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_0 = I \quad \sigma_x = \sigma_1 = X \quad \sigma_y = \sigma_2 = Y \quad \sigma_z = \sigma_3 = Z$$

Las compuertas de Pauli forman un grupo

$$XX = YY = ZZ = I$$

$$XY = -YX = iZ \quad \implies XY \simeq YX \simeq Z$$

$$YZ = -ZY = iX \quad \implies YZ \simeq ZY \simeq X$$

$$ZX = -XZ = iY \quad \implies ZX \simeq XZ \simeq Y$$

$$XYZ = iI \quad \implies XYZ \simeq I$$